

I. Théorème.Th. : $\forall x \in E, \text{Card}(\Omega_x) = [G : G_x]$

$$G \times E \rightarrow E$$

On considère que G agit à gauche sur E : $(g, x) \mapsto g \cdot x$.

Pour démontrer que $\forall x \in E, \text{Card}(\Omega_x) = [G : G_x]$,

où $[G : G_x]$ note l'indice du sous-groupe G_x dans le groupe G ,
 (qui est par définition (p. 76) le cardinal de $(G/G_x)_g$,
 ensemble des classes à gauche modulo G_x , ie (p. 72) $\bar{y} = y \cdot G_x$)

mais allons montrer qu'il existe une bijection de Ω_x sur $(G/G_x)_g$.

On a $\Omega_x = \{g \cdot x / g \in G\}$, et on pose $Q_x = (G/G_x)_g = \{g \cdot G_x / g \in G\}$.

Soit $f: \Omega_x \rightarrow Q_x$
 $g \cdot x \mapsto g \cdot G_x$
 (où $G_x = \{g \in G / g \cdot x = x\}$)

• f est une application: en effet chaque $g \cdot x \in \Omega_x$ admet par f une image unique.

Par l'absurde: supposons $g \cdot x = g' \cdot x$. Alors $x = g^{-1}g' \cdot x$, donc $g^{-1}g' \in G_x$,
 d'où $g \cdot G_x = g' \cdot G_x$.

• f est surjective par définition: chaque $g \cdot G_x \in Q_x$ admet ^{au moins} $g \cdot x$ par antécédent.

• f est injective: Supposons que $g_1 \cdot G_x = g_2 \cdot G_x$.

Alors $g_1^{-1}g_2 \in G_x$, donc $g_1^{-1}g_2 \cdot x = x$ par définition de G_x ,

donc $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$.

II Ainsi, f est une bijection, d'où l'égalité recherchée.

II. Premier corollaire.

Cor 1: Soient E ens. fini et G groupe opérant sur E .

Si $\{x_i\}_{1 \leq i \leq r}$ est une famille de représentants des G -orbites distinctes, alors $\text{Card}(E) = \sum_{i=1}^r [G : G_{x_i}]$.

$G \times E \rightarrow E$

On considère que G agit à gauche sur E : $(g, x) \mapsto g \cdot x$.

Pour démontrer que $\forall x \in E$, $\text{Card}(\mathcal{O}_x) = [G : G_x]$,

où $[G : G_x]$ note l'indice du sous-groupe G_x dans le groupe G ,
 (qui est par définition (p. 76) le cardinal de $(G/G_x)_g$,
 ensemble des classes à gauche modulo G_x , i.e. (p. 72) $\bar{g} = g \cdot G_x$)

mais allons montrer qu'il existe une bijection de $\mathcal{O}_x$ sur $(G/G_x)_g$.

On a $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x / g \in G\}$, et on pose $G_x = (G/G_x)_g = \{g \cdot G_x / g \in G\}$.
 (où $G_x = \{g \in G / g \cdot x = x\}$)

Soit $\begin{cases} \iota : \mathcal{O}_x \rightarrow G_x \\ g \cdot x \mapsto g \cdot G_x \end{cases}$

- ι est une application: en effet chaque $g \cdot x \in \mathcal{O}_x$ admet par ι une image unique.
- Par l'absurde: supposons $g \cdot x = g' \cdot x$. Alors $x = g^{-1} g' \cdot x$, donc $g^{-1} g' \in G_x$,
 d'où $g \cdot G_x = g' \cdot G_x$.
- ι est surjective par définition: chaque $g \cdot G_x \in G_x$ admet ^{au moins} $g \cdot x$ par antécédent.
- ι est injective: Supposons que $g_1 \cdot G_x = g_2 \cdot G_x$.
 Alors $g_1^{-1} g_2 \in G_x$, donc $g_1^{-1} g_2 \cdot x = x$ par définition de G_x ,
 donc $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$.

Il Anssi, ι est une bijection, d'où l'égalité recherchée.

III. Second corollaire.

Cor 2: Equation aux classes. Soit G un groupe fini considéré comme opérant sur lui-même par conjugaison. Si $\{x_i\}_{1 \leq i \leq r}$ est une famille de représentants des classes de conjugaison distinctes dans G :
$$o(G) = \sum_{i=1}^r [G : C_G(x_i)]$$
 où $C_G(x_i)$ note le centralisateur dans G de $\{x_i\}$.

Dans l'action de G sur lui-même par conjugaison, on a, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$
$$G_{x_i} = \{g \in G / g x_i g^{-1} = x_i\}$$

Or $\forall g \in G, g x_i g^{-1} = x_i \Leftrightarrow g x_i = x_i g \Leftrightarrow g \in C_G(x_i)$
Donc $G_{x_i} = C_G(x_i)$.

En appliquant le corollaire précédent, on a donc:
$$o(G) = \sum_{i=1}^r [G : C_G(x_i)].$$

IV. Equation aux classes.

Th.: Soit G groupe fini de centre $Z(G)$. Soit $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ une famille de représentants des classes de conjugaison distinctes et non réduites à un point de G . Alors:

$$o(G) = o(Z(G)) + \sum_{i=1}^k [G : C_G(x_i)].$$

Il suffit de différencier le cas des orbites réduites à un point en démontrant la "remarque" citée dans le cours:

$$x \in Z(G) \Leftrightarrow C_G(x) = G \Leftrightarrow [G : C_G(x)] = 1 \Leftrightarrow \Omega_x = \{x\}$$

$= \text{Card } \Omega_x, \text{ Cf. Th. } \wedge$

Donc les éléments de $Z(G)$ sont exactement ceux dont l'orbite est réduite à un point. D'où:

$$o(G) = \underbrace{o(Z(G))}_{\text{orbites ponctuelles}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k [G : C_G(x_i)]}_{\text{autres orbites}}.$$

Les applications de l'équation aux classes sont les théorèmes de Sylow qui forment une ricopèque partiellement du th. de Lagrange (si G gr. fini et $H \leq G$, alors $|H|$ divise $|G|$).

1^{er} th. de Sylow (p. 207): G fini et p premier, $p \mid |G|$. Si $|G| = 3p^n$ et $p \nmid 3$, alors $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un sg de G d'ordre p^i .

2nd th. de Sylow (p. 210): G fini, p premier, $p \mid |G|$.

- tout p -sg de G (sg d'ordre p^n) est contenue dans un p -sg de Sylow de G
- les p -sg de Sylow de G sont conjugués
- le nombre de p -sg de Sylow de G est congru à 1 modulo p et divise l'ordre de G .